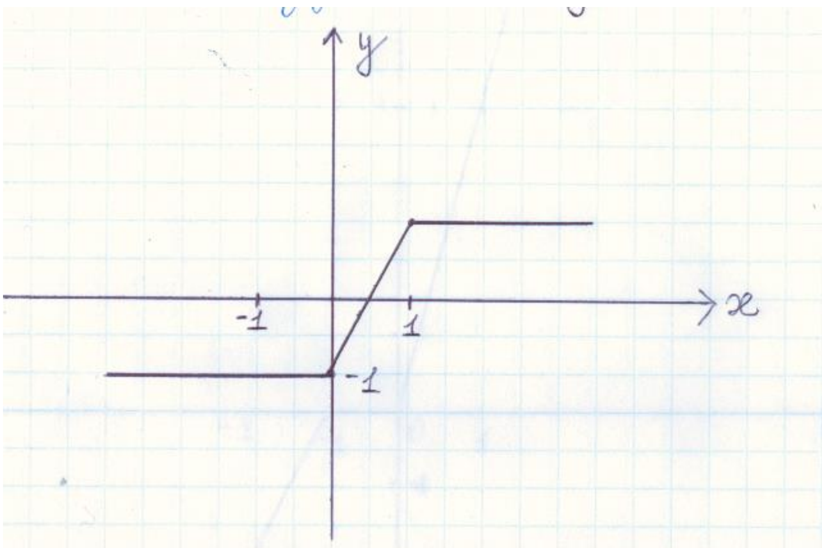
Метод линейного сплайна.

Цель. Освоить метод линейного сплайна для построения графиков, содержащих модуль; научить применять изученный метод в простых случаях.

Пусть заданы $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ - точки смены формул в кусочно-элементарных функциях. Функция f, определенная при все x, называется кусочно-линейной, если она линейна каждом интервале $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, … $(x_{n-1}; x_n)$, $(x_n; +\infty)$ и к тому же выполнены условия согласования, то есть в точках смены формул функция не терпит разрыв.

Непрерывная кусочно-линейная функция называется линейным сплайном. Её график (см. рис. 1) есть ломаная с двумя бесконечными крайними звеньями – левым (отвечающим значениям $x < x_1$) и правым (отвечающим значениям $x > x_n$).

Рисунок1



Эта функция задается тремя формулами:

$$y = \begin{cases} -1, x < 0, \\ 2x - 1, 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Но нетрудно заметить, что эту же функцию можно задать одной формулой, использую модули: y =$|x| - |x-1|$**. Оказывается, что и любую непрерывную кусочно-линейную функцию можно задать формулой вида** $y = ax + b + c_1|x - x_1| + c_2|x - x_2| + \ldots + c_n|x - x_n|$**, где** $a, b, c_1 \ldots c_n$ **- числа.**

<u>График любой такой функции – ломаная с бесконечными крайними звеньями.</u>

Чтобы построить такую ломанную, достаточно знать все её вершины и по одной точке на левом и правом бесконечных звеньях.

Эти соображения позволяют легко строить графики функций такого вида без раскрытия модулей, не переходя к их кусочному заданию.

Достаточно составить таблицу:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n	y_{n+1}

где x_0 **и** x_{n+1} **- произвольные значения х, такие, что** $x_0 < x_1$ **и** $x_{n+1} > x_n$**, а** $x_1 \dots x_n$ **- точки смены формул**.

$y_0 \dots y_{n+1}$ **- точки значения функции в этих точках**.

Все точки наносятся на координатную плоскость, последовательно соединяются отрезками, два крайних звена – лучи.

<u>Практикум</u>

<u>Пример 1</u>. Построить график функции y = 3x +1 - $|x+1|$ +2$|x|$.

Решение.

Найдем точки смены формулы задания функции: x+1=0 и x = 0.

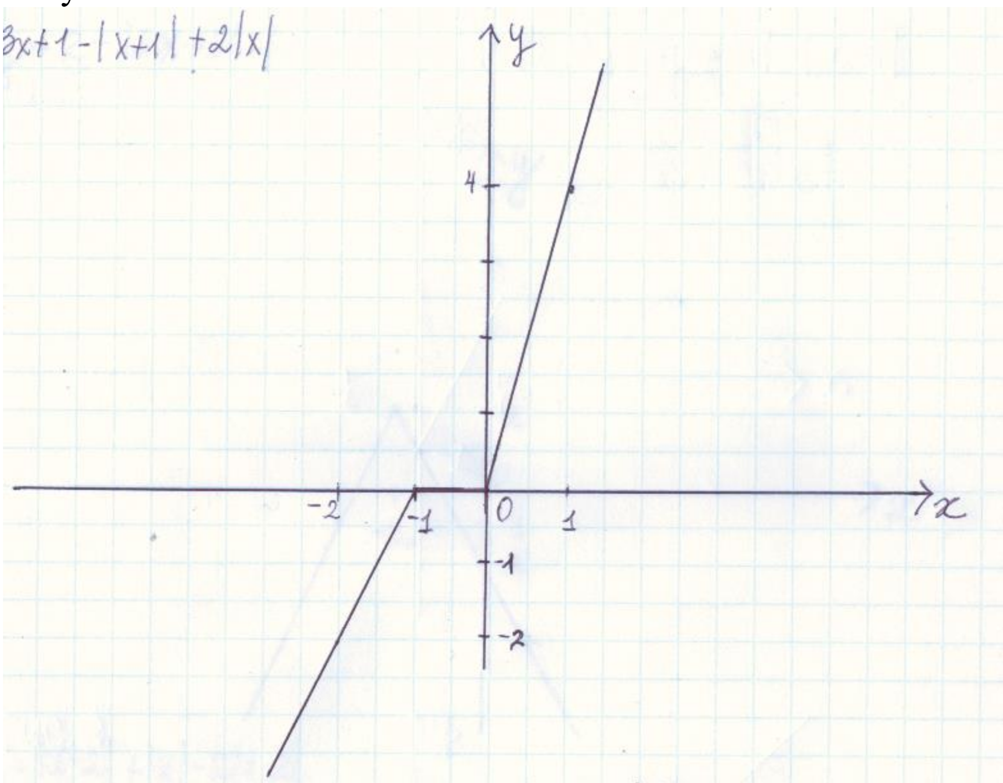
x = - 1

Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1
y	-2	0	0	4

Отмечаем точки в системе координат и получаем график заданной функции (см.рис. 2)

Рисунок 2



Пример 2. Задайте функцию у = х + $|x-2|-|x|$ в виде кусочно-линейной и постройте график двумя способами.

I способ.

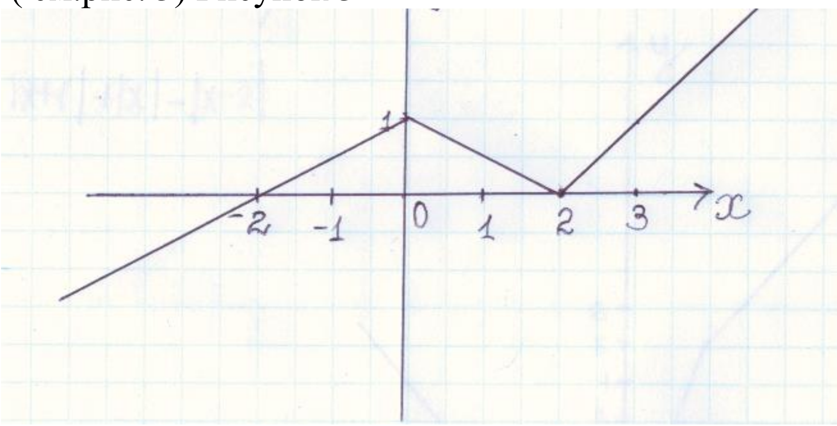
Подготовим таблицу для построения графика с учетом линейного сплайна для этого найдем точки смены формул: х = 0, х – 2 = 0,

х = 2

и выберем две точки левее 0 и правее 2. Это -1 и 3 получим таблицу:

x	-1	0	2	3
y	1	2	0	1

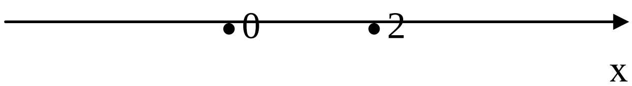
Отмечаем точки в системе координат и получаем график заданной функции (см.рис. 3) Рисунок 3



II способ.

1) Найдем значения х, при которых выражения стоящие под модуля, меняют знак,

х = 2 и х = 0. Значит, они – точки смены формул, они разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty;0)$, $[0;2)$, $[2;+\infty)$.



2) Найдем эти формулы.

Если х < 0, то у = х – х +2+ х, **у = х + 2.**

Если 0≤ х ≤ 2, то у = х – х + 2 – х, **у = - х + 2.**

Если х > 2, то у = х+ х – 2 – х**, у = х – 2.**

Значит $y = \begin{cases} x+2, x<0, \\ -x+2, 0 \le x \le 2, \\ x-2, x>2. \end{cases}$

Очевидно, что график совпадает с рисунком 3.

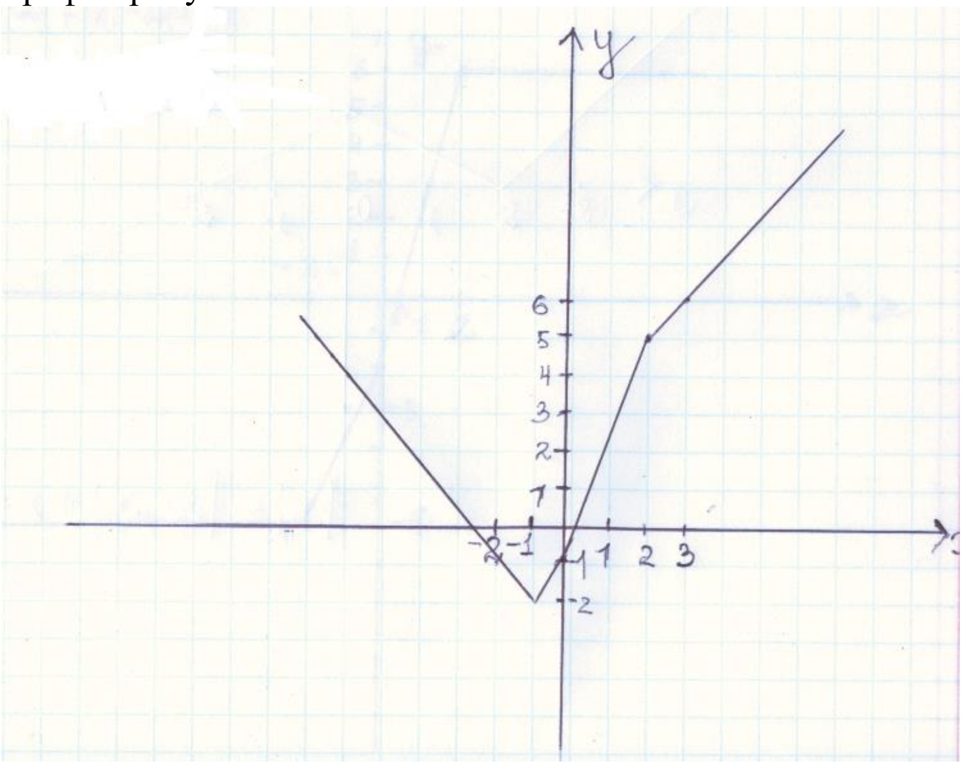
Задания для самостоятельной работы.

1. Постройте график функции у = $|x+1|+|x|+|x-2|$.

Решение:

x	-2	-1	0	2	3
y	-1	-2	-1	5	6

График рисунок 4.



2. Построить график функции $y=|x+2|+|x|-2|x-2|$

Решение:

1) Найдем значения х, при которых выражения стоящие под модуля, меняют знак,

х = -2 и х = 0, х=2. Значит, они – точки смены формул и разбивают числовую прямую на промежутки: $(-\infty;-2)$, $[-2;0)$, $[0;2)$, $[2;+\infty)$.

-2• 0• 2•

X

2) Найдем эти формулы.

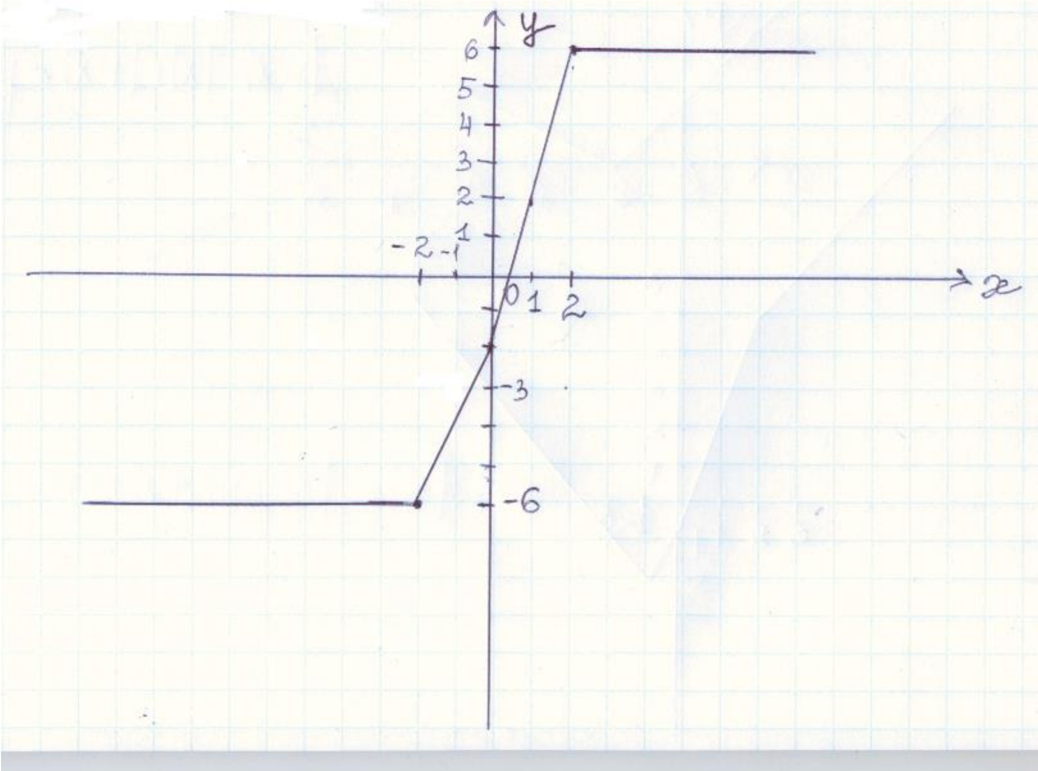
Если х < -2, у = -х – 2 – х +2х – 4, у = -6.

Если $-2 \le x < 0$, у = х +2 – х + 2х – 4 = 2х – 2.

Если $0 \le x < 2$, у = х + 2 + х + 2х - 4= 4х -2.

Если $x \ge 2$, у = х + 2 + х – 2х + 4 = 6.

Получим, следующий график (см. рисунок 5).
Рисунок 5



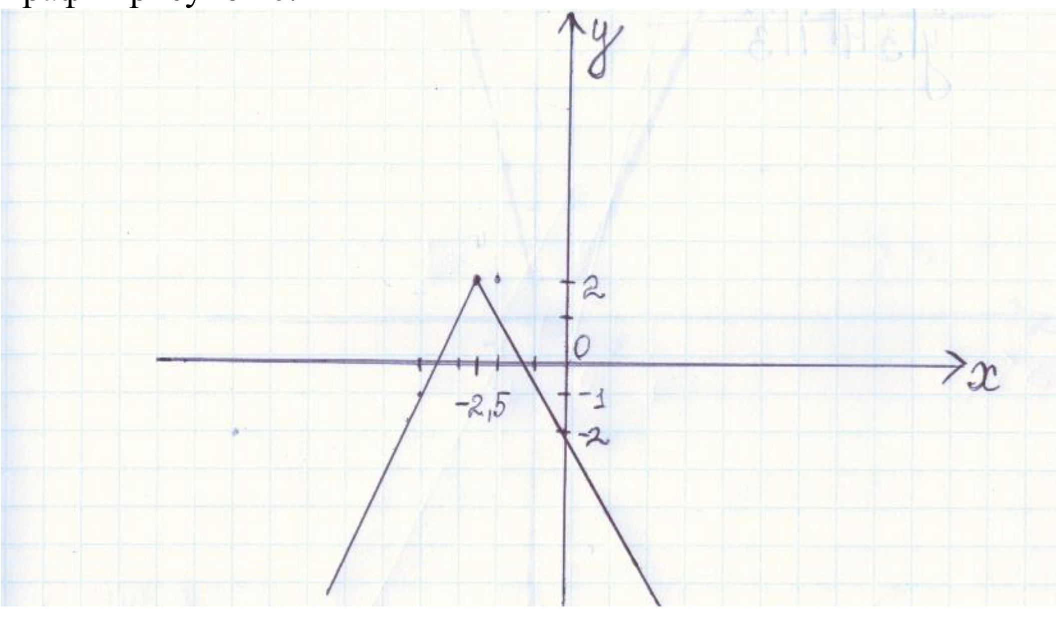
3. Постройте график функции $y = 2 - |2x + 5|$

Решение. Преобразуем заданную функцию к виду: y = 2 -2$|x + 2{,}5|$.

Тогда таблица будет выглядеть так:

x	-3	-2,5	-1
y	1	2	-1

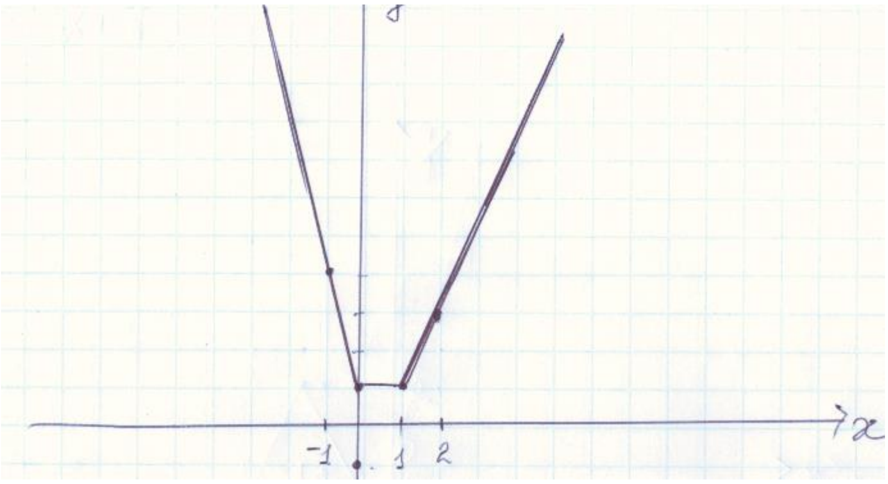
График рисунок 6.



4. Постройте график функции $y = |x| + |x-1|$

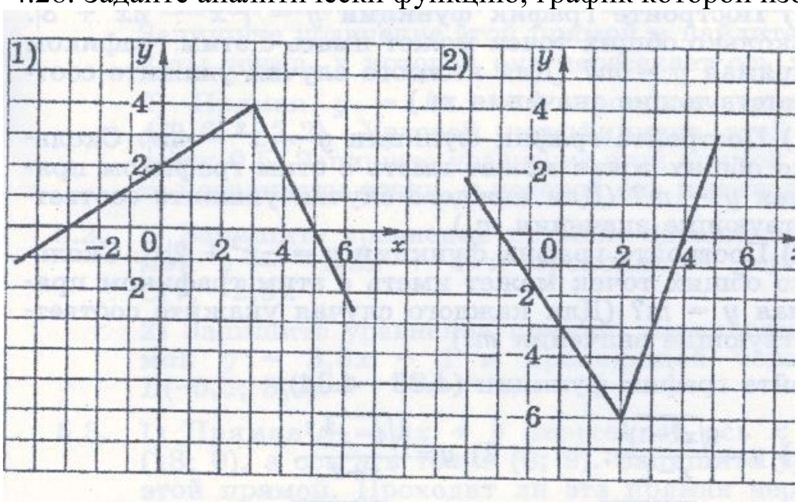
x	-1	0	1	2
y	3	1	1	3

График рисунок 7.



<u>Рассмотрим задания на 6 баллов на экзамене в 9 классе, содержащие знак модуля.</u>

4.28. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.

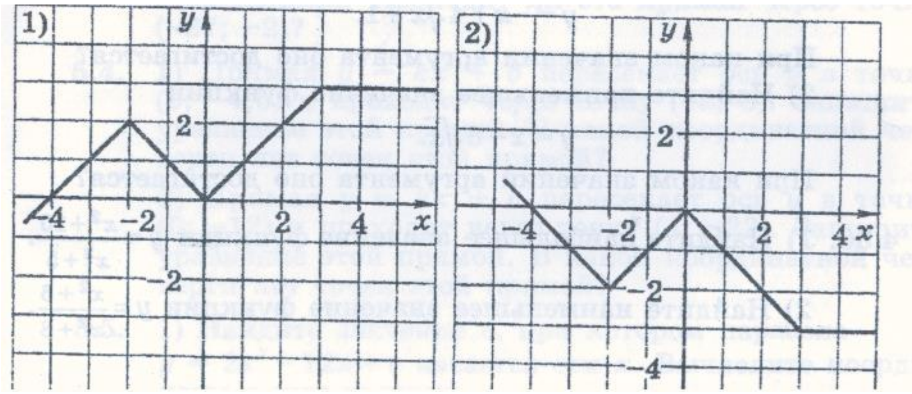


Ответ: 1) $y = \begin{cases} x < 3, y = \dfrac{2}{3}x + 2, \\ x \geq 3, y = -2x + 10. \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x < 2, y = -1{,}5 - 3, \\ x \geq 2, y = 3x - 12. \end{cases}$

1) $y = -2x + 14 - 4|x-3|$. 2) $y = \dfrac{3}{4}x + 4\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}|x-2|$.

Задание 2.

Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.



Решим задание 1) используя формулу линейного сплайна, зная что **непрерывную кусочно-линейную функцию можно задать формулой вида** $y = ax + b + c_1|x - x_1| + c_2|x - x_2| + ... + c_n|x - x_n|$**, где** $a, b, c_1 ... c_n$ **- числа.**

<u>График любой такой функции – ломаная с бесконечными крайними звеньями.</u>

Решение.

Так как у нас три точки смены формулы, тогда функция будет задаваться формулой вида

$y = ax + b + c_1|x - x_1| + c_2|x - x_2| + c_3|x - x_3|$, где $c_i = \frac{k_{i+1} - k_i}{2}$, $a = \frac{k_1 + k_n}{2}$

Используя данные формулы получаем, что $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = 1,$

$c_1 = \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1,\ c_2 = \frac{k_3 - k_2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,\ c_3 = \frac{k_4 - k_3}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$

Получим формулу $y = ax + |x+2| + |x| - \frac{1}{2}|x-3| + b$,

$y(0) = 0$, тогда подставим в полученную формулу и найдём b.

$0 = -2 + 0 - \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = 3\frac{1}{2},\ a = \frac{1+1}{2} = 1$

Все полученные значения подставляем в формулу и она примет вид

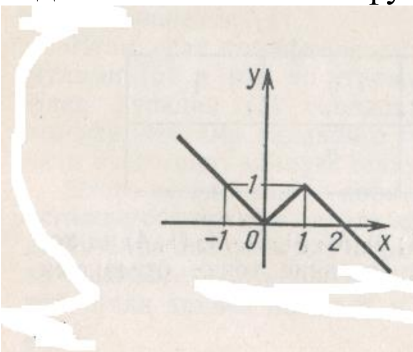
$y = x + 3\frac{1}{2} + |x+2| + |x| - \frac{1}{2}|x-3|.$

Решение 2) проводим по аналогичным рассуждениям и получаем формулу

$y = \frac{1}{2}x - 3{,}5|x+2| - |x| + \frac{1}{2}|x-3|.$

Задание 3.

Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.



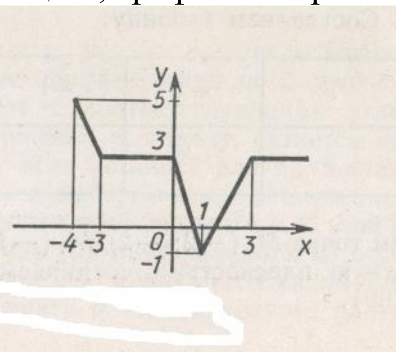
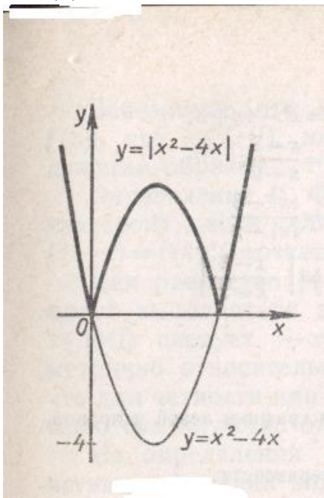
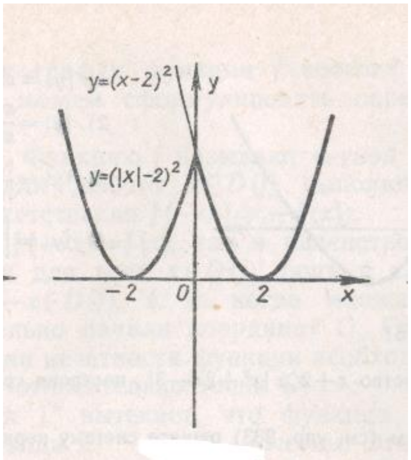


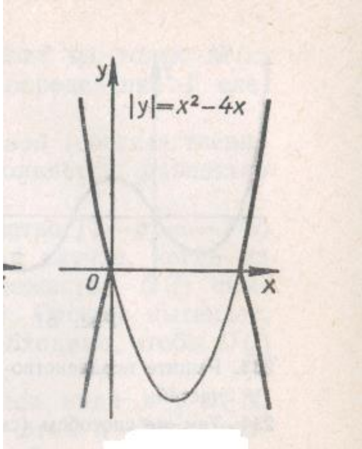
Рис. 1. Рис.2

Ответы: 1) $y=-x+1+|x|-|x-1|$; 2) $y=2x+10-|x+3|+2|x|-|x-1|-|x-3|$.

Раздел 2.






y
|y|=x²−4x
0
x