Тема: «Параметр и квадратичная функция в задачах ЕГЭ».

<u>Задача 1.</u>

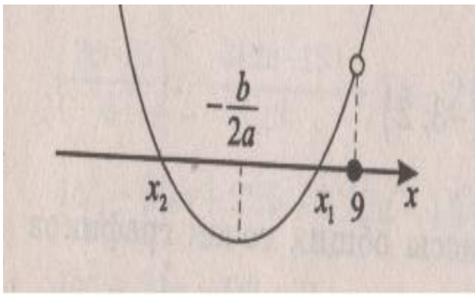
Найти все значения параметра а, при которых больший корень уравнения

$x^2-(14a-9)x+49a^2-63a+20=0$ **меньше 9.**

Решение:

Графически это можно изобразить так:

Если f(x)= $x^2-(14a-9)x+49a^2-63a+20=0$ **,**



, то $\begin{cases} f(9)\succ 0, \\ -\dfrac{b}{2a}\prec 9, \\ D\succ 0; \end{cases}$ ***значит***

$$\begin{cases} 9^2-(14a-9)\cdot 9+49a^2-63+20>0, \\ \dfrac{14a-9}{2}<9, \\ (14a-9)^2-4(49a^2-63a+20)>0 \end{cases}$$ ***тогда***

$$\begin{cases} 81-126a+81+49a^2-63a+20>0, \\ 14a-9<18, \\ 196a^2-252a+81-196a^2+252a-80>0 \end{cases}$$ **;**

$$\begin{cases} 49a^2 - 189a + 182 > 0, \\ 14a < 27, \\ 196a^2 - 252a + 81 - 196a^2 + 252a - 80 > 0 \end{cases};$$

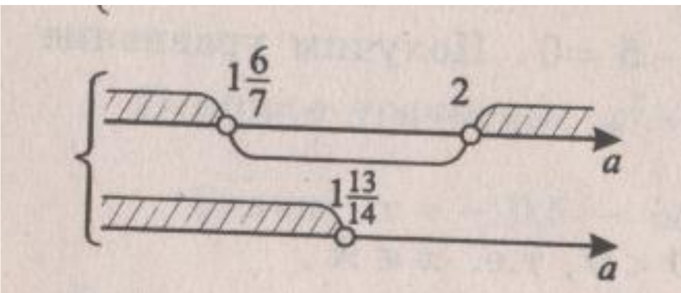
$$\begin{cases} 7a^2 - 27a + 26 > 0, \\ a < \dfrac{27}{14}, \\ 1 > 0 \end{cases}$$

$$7a^2 - 27a + 26 \succ 0,$$

D=(-27) ^{2} ***-*** $4 \cdot 7 \cdot 26$ ***=729-728=1***

$$a_1 = \frac{27+1}{2 \cdot 7} = 2,$$

$$a_2 = \frac{27-1}{2 \cdot 7} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}.$$



a< $1\frac{6}{7}$

Ответ: при a< $1\frac{6}{7}$ ***больший корень уравнения***

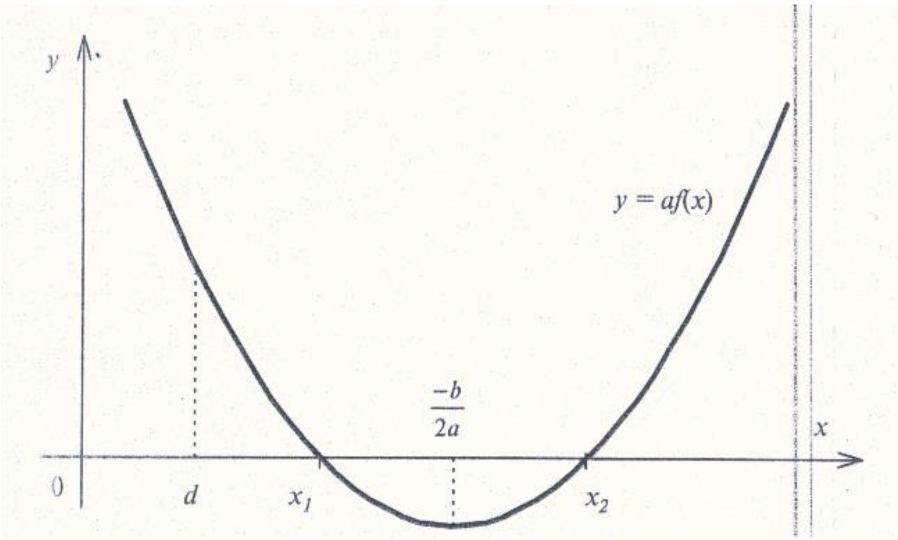
$x^2 - (14a - 9)x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$ ***меньше 9.***

Теория.

Идея решения заданий данного вида связана с описанием тех или иных свойств квадратного трехчлена в их геометрической интерпретации на графике. В частности, для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ ***были больше числа d, необходимо и достаточно выполнение условий***

$$\begin{cases} af(d) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > d, \\ D \geq 0; \end{cases} \quad (*)$$

Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:



Условия (*) равносильны условиям

$$\begin{cases} af'(d) < 0, \\ af(d) > 0, \\ D \geq 0; \end{cases} \quad (**)$$

где D – дискриминант, а f ʼ - производная квадратного трехчлена.

Требование же того чтобы корни квадратного трехчлена были меньше числа d означает выполнение условий

$$\begin{cases} af'(d) > 0, \\ af(d) > 0, \\ D \geq 0; \end{cases} \quad (***)$$

Таким образом, для выполнения заданий данного типа необходимо решения системы (**) или системы (***) в зависимости от условия задачи.

Задача 2.

Найти все значения параметра а, при которых неравенство $9^x - (7a-1)\cdot 3^x + 12a^2 - a - 6 \leq 0$ ***имеет единственное решение.***

Решение:

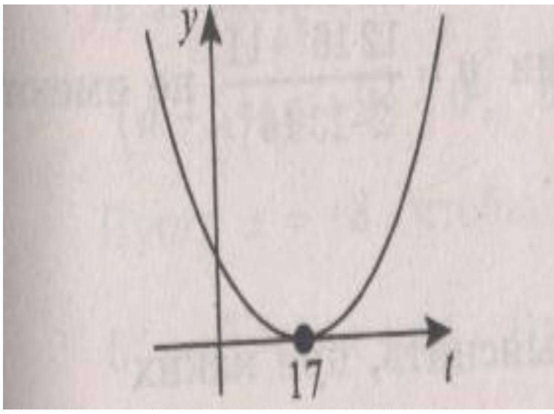
Пусть $3^x = t$ **(t > 0)**

$t^2 - (7a-1)t + 12a^2 - a - 6 \leq 0$;

а)

$D = (7a-1)^2 - 48a^2 + 4a + 24 = a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2$

a=5 D = 0.



При a=5

$$t_1 = t_2 = \frac{7\cdot 5-1}{2} = 17 > 0(3^x > 0).$$

б) При a≠5 неравенство имеет более одного решения, что не подходит по условию задачи.

Ответ: a=5 неравенство $9^x - (7a-1)\cdot 3^x + 12a^2 - a - 6 \le 0$ ***имеет единственный корень.***

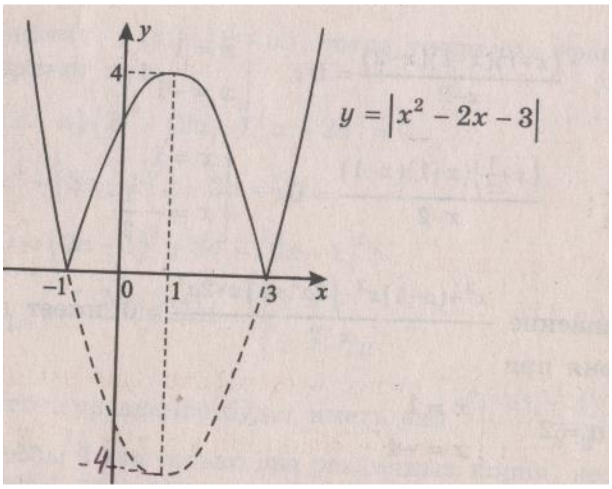
<u>Задача 3.</u>

Сколько корней имеет уравнение $\left|x^2 - 2x - 3\right| = a$ ***в зависимости от значения параметра а?***

Решение:

Построим график функции у= $x^2 - 2x - 3 =$ $= (x-1)^2 - 4.$ ***Имеем сдвиг графика у=*** x^2 ***вправо на 1 единицу и вниз на 4 единицы.***

Для того чтобы построить график у= $\left|f(x)\right|$***, необходимо часть графика, находящегося в верхней полуплоскости, сохранить , а часть графика, находящегося в нижней полуплоскости, симметрично отразить в верхнюю полуплоскость. Получим следующий рисунок.***



По рисунку видим следующий результат:

В уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$***, если***

1) а=о, то существует <u>два корня;</u>

2) а∈(0;4), то существует <u>четыре корня</u>;

3) а=4, то существует <u>три корня</u>;

4) а∈(4;+ ∞), то существует <u>2 корня</u>;

5) а∈(- ∞ ;0), то <u>корней нет</u>.

Ответ:

1) а=о, то существует <u>два корня;</u>

2) а∈(0;4), то существует <u>четыре корня</u>;

3) а=4, то существует <u>три корня</u>;

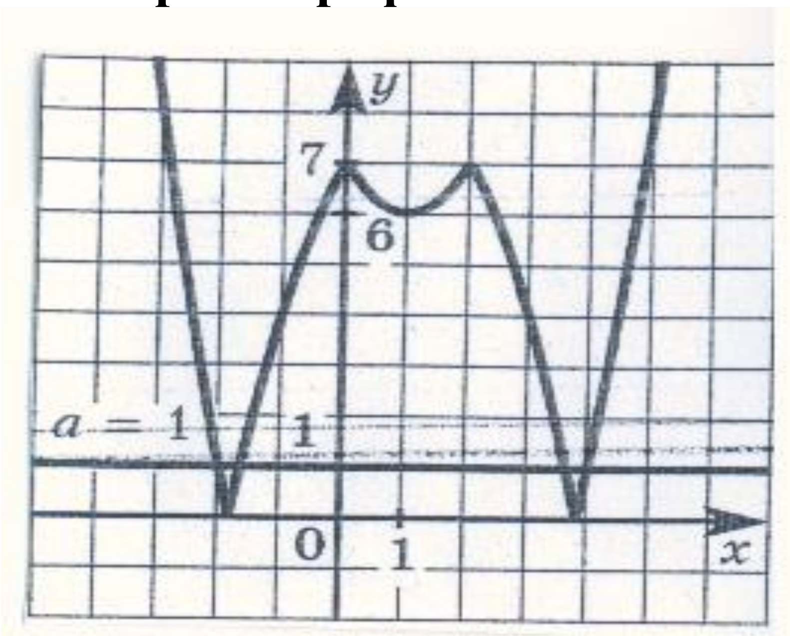
4) а∈(4;+ ∞), то существует <u>2 корня</u>;

5) а∈(- ∞ ;0), то <u>корней нет</u>.

<u>Задание 4.</u>

При каких значениях параметра а число корней уравнения $||x^2 - 2x| - 7| = a$ ***в четыре раза больше а?***

Решение: **Построим график левой части**



уравнения.

Проводя горизонтали y=a при различных a, получаем такую информацию о числе пересечений горизонтали с графиком левой части:

Значение a	$(-\infty;0)$	*0*	*(0;6)*	*6*	*(6;7)*	*7*	$(7;+\infty)$
Число корней (=4a)	***0***	***2***	***4***	***5***	***6***	***4***	***2***

Во второй строке таблицы есть ровно два числа, кратные четырем: 0 и 4. Ситуация из первого столбца невозможна, так как a< 0 и 4a=0 одновременно. Также невозможна ситуация из предпоследнего столбца. В случае с третьим столбцом есть число a, для которого 0< a < 6 и при этом 4a = 4.

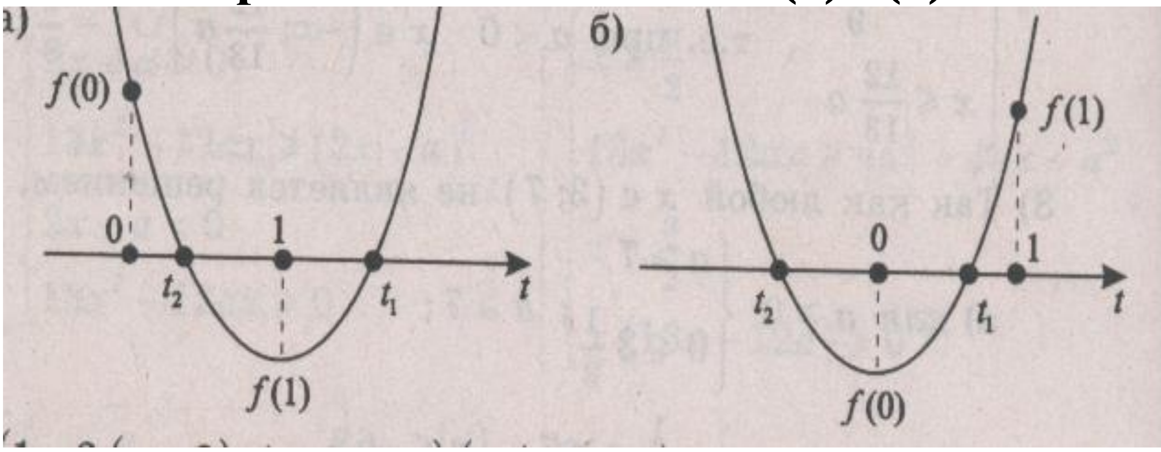
Ответ: 1.

Задача 5.

При каких значениях параметра а уравнение $\cos^4 2x - 2(a+2)\cos^2 2x - (2a+5) = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение:

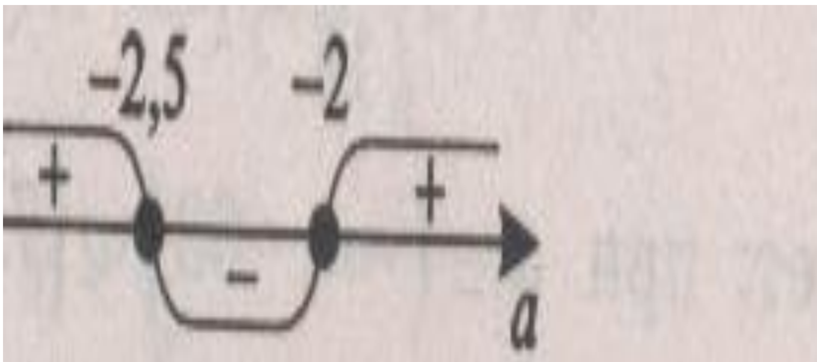
Пусть $\cos^2 2x = t$, $t \in [0;1]$, тогда f(t)= $t^2 - 2(a+2)t - (2a+5)$. Условием существования хотя бы одного корня на $[0;1]$ является $f(1) \cdot f(0) < 0$.



$(1-2(a+2) \cdot 1 - 2a - 5) \cdot (-(2a+5)) \le 0$;

$-(-4a-8)(2a+5) \le 0$;

$4(a+2)(2a+5) \le 0$.



Ответ: при $a \in [-2{,}5;-2]$ существует хотя бы один корень уравнения $\cos^4 2x - 2(a+2)\cos^2 2x - (2a+5) = 0$.

Задание 6.

При каких значениях параметра а уравнение $3\cos^2 x - (3a+10)\cos x + 10a = 0$ не имеет корней?

Решение: Пусть cos x = t и $f(t)=3t^2-(3a+10)t+10a$.

1) Так как cos x$\in[-1;1]$, то при $[-1;1]\subset(t_2;t_1)$, решений нет.

Но это возможно при

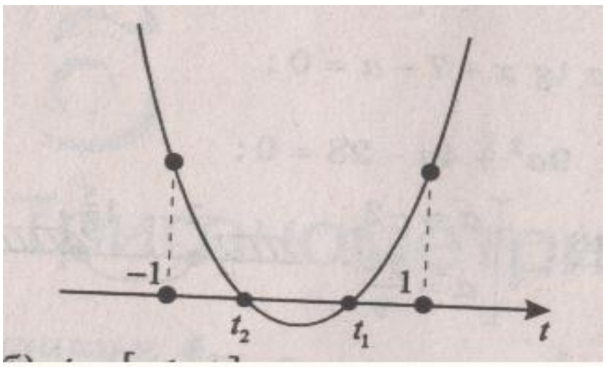
$$\begin{cases} f(1) \prec 0 \\ f(-1) \prec 0, \end{cases}$$ **тогда**

$$\begin{cases} 3-(3a+10)+10a \prec 0 \\ 3+(3a+10)+10a \prec 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \prec 1 \\ a \prec -1 \end{cases} \Longrightarrow a \in (-\infty;-1).$$

2) D =(3a+10) ^{2} -120a = (3a -10) ^{2} $\geq$ 0.
Значит в уравнении корни есть всегда, но возможны различные случаи.

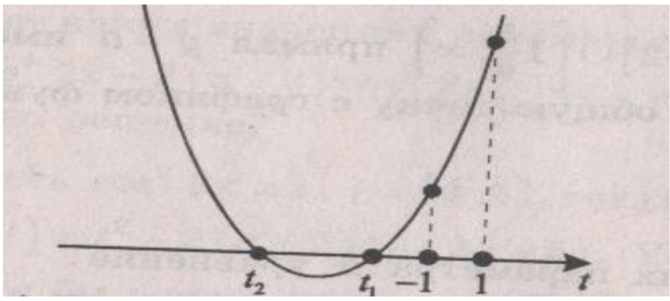
а) $t\in[-1;1]$, учтём, что D$\geq$0,



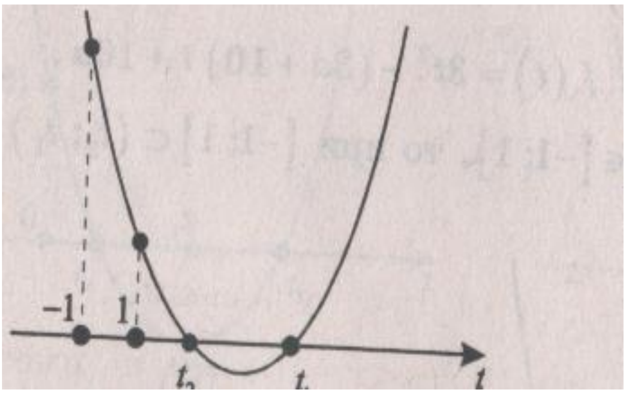
тогда $-1 \le -\dfrac{b}{2a} \le 1$, т.е. $-1 \le \dfrac{3a+10}{6} \le 1$;

$a \in \left[-5\dfrac{1}{3}; -1\dfrac{1}{3}\right]$.

б) $t \notin [-1;1]$. ***Пусть*** $t \prec -1$.



в) Пусть $t \succ 1$.

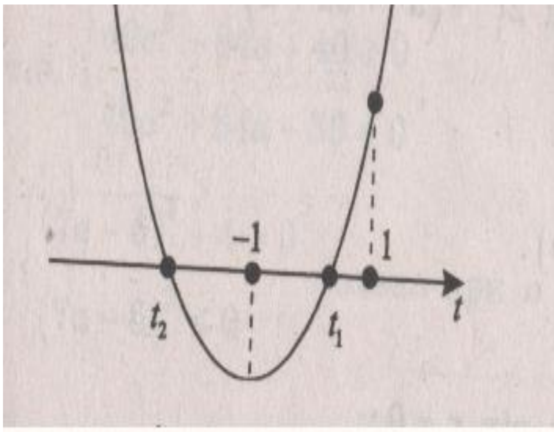


Во всех этих случаях $\begin{cases} f(1) \succ 0 \\ f(-1) \succ 0; \end{cases} \begin{cases} a \succ 1 \\ a \succ -1; \end{cases} \Rightarrow a \in (1;\infty)$.

Примечание:

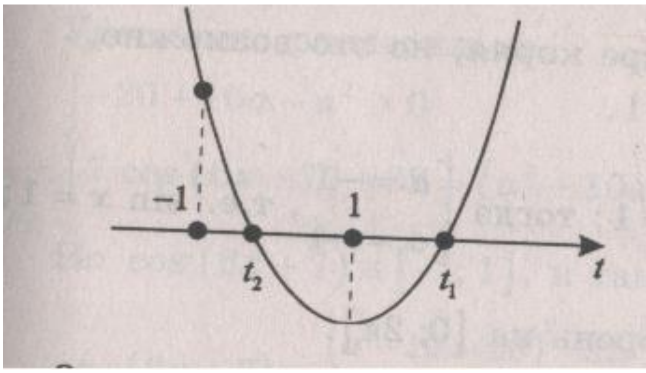
Учтём, что $\left[-5\frac{1}{3};-1\frac{1}{3}\right] \not\subset (1;\infty)$**, то случай а) реализоваться не может.**

3)Если $\begin{cases} f(1) \succ 0 \\ f(-1) \prec 0; \end{cases}$ **, то при** $\begin{cases} a \succ 1 \\ a \prec -1, \end{cases}$ $\varnothing$**,при этих условиях мог бы существовать один корень для t. В данном случае это невозможно.**



4)Если $\begin{cases} f(1) \prec 0 \\ f(-1) \succ 0; \end{cases}$ **т.е.** $\begin{cases} a \prec 1 \\ a \succ -1, \end{cases}$

существует только один корень для t, таким образом a$\in$**(-1;1).**



Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ **уравнение**

$3\cos^2 x - (3a+10)\cos x + 10a = 0$ не имеет корней.

Задача 7.

Найдите все значения параметра а, при которых уравнение cos24x +2(8+5a)sin12x -110a +65=0 имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Приведем уравнение к уравнению относительно одного аргумента и одной функции.

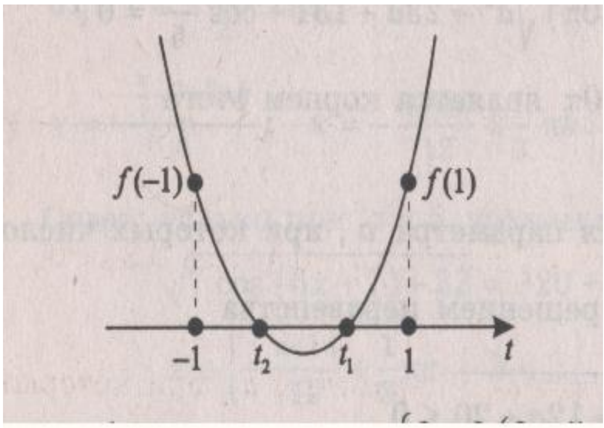
Так как $\cos 24x = 1 - \sin^2 12x$, то

$1 - 2\sin^2 12x + 2(8+5a)\sin 12x - 110a + 65 = 0.$

Пусть $\sin 12x = t$, тогда уравнение имеет вид

$2t^2 - 2(8+5a)t + 110a - 66 = 0.$

Но $|t| \leq 1$, значит

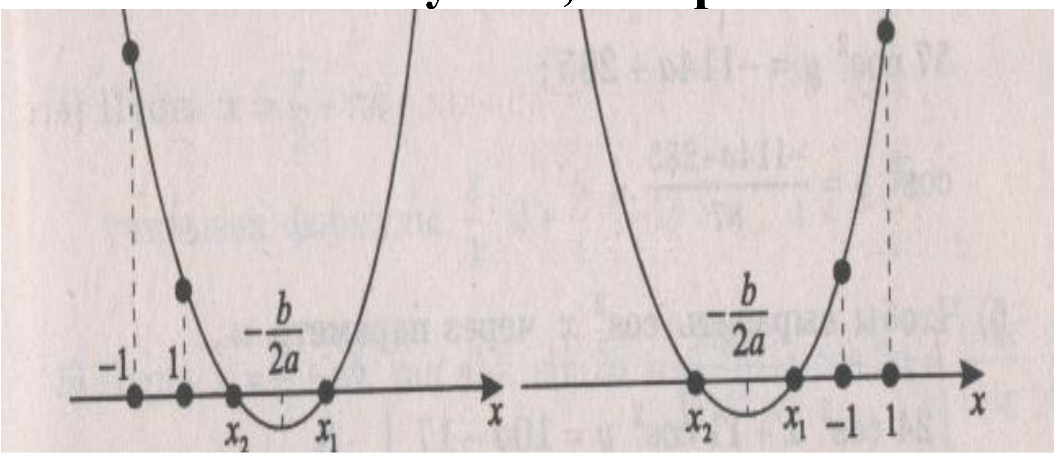


$$\begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ D \ge 0 \\ -1 \le -\dfrac{b}{2a} \le 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 + 2(8+5a) + 110a - 66 \ge 0 \\ 2 - 2(8+5a) + 110a - 66 \ge 0 \\ (8+5a)^2 - 2(110a - 66) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{8+5a}{2} \le 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 120a \ge 48 \\ 110a \ge 80 \\ 25a^2 - 140a + 196 \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{8+5a}{2} \le 1 \end{cases}; \begin{cases} a \ge 0{,}4 \\ a \ge 0{,}8 \\ (5a-14)^2 \ge 0 \Rightarrow \varnothing \\ -2 \le a \le -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Примечание. **Условие** $\frac{b}{2a} \in [-1;1]$ **необходимо, чтобы не было случаев, изображенных ниже.**



б) Но возможно, что есть только одно решение относительно t.

Тогда $f(-1)\bullet f(1)<0$***, значит*** $(a-0{,}4)(a-0{,}8)<0$ ***,т.е.*** $a\in(0{,}4;0{,}8)$.

Ответ: существуют значения параметра а, при которых уравнение cos24x +2(8+5a)sin12x -110a +65=0 имеет хотя бы одно решение. Это условие $a\in(0{,}4;0{,}8)$.

<u>Задача 8.</u>

При каких значениях параметра а уравнение

sin ^{2} ***x -*** $|\sin x|$ ***+a=0 имеет четыре корня на*** $[0;2\pi]$***?***

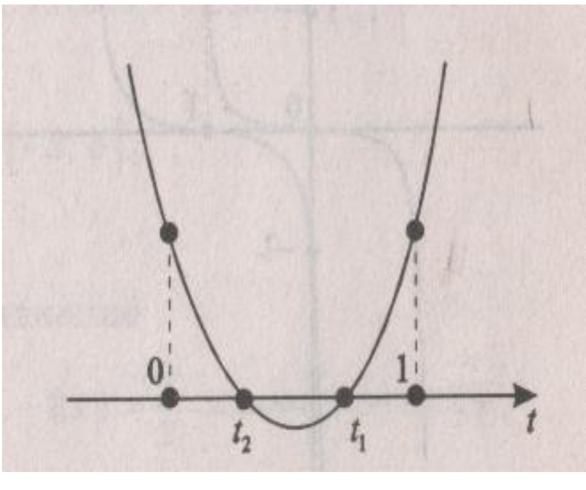
Решение:

Пусть $|\sin x|$ **=t (t>0), тогда sin** ^{2} **x=** $|\sin x|^2$ **= t** ^{2} **,**

тогда t ^{2} **-t + a = 0; t** $_0$ **=** $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$

(ось симметрии t = $\dfrac{1}{2}$ **). D = 1 – 4a >0, чтобы было два корня. Так как t > 0, то a > 0, но 0 < t < 1, тогда чтобы это выполнялось**

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)>0 \end{cases};\begin{cases} a>0 \\ a>0 \end{cases},$$



т.е. при $a \in \left(0;\frac{1}{4}\right)$ **существует два корня** $t \in (0;1)$.

$$\left[\begin{array}{l}|\sin| = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \\ |\sin| = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\end{array}\right.$$ **, значит** $0 < |\sin x| < 1$.

Итак, тогда есть четыре корня на $[0;2\pi]$.

***Ответ*: при** $a \in \left(0;\frac{1}{4}\right)$ **уравнение**

sin ^{2} **x -** $|\sin x|$ **+a=0 имеет четыре корня на** $[0;2\pi]$.

Задача 9.

Найдите все значения a*, для которых при каждом x из промежутка* $(-3;-1]$ *значение выражения* x^4 *- 1 не равно значению выражения* $(2a+8)\cdot x^2$.

Решение.

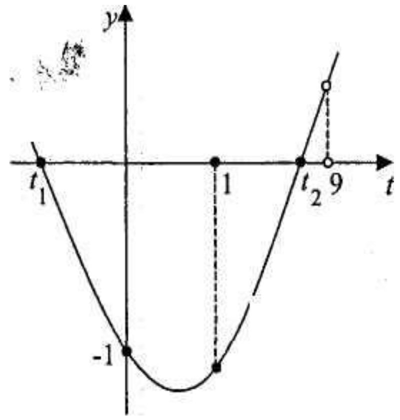
1.Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие $x^4 - 1 \neq (2a+8)\cdot x^2$.

$x^4 - 1 - (2a+8)\cdot x^2 \neq 0$

Пусть $x^2 = t$ **и** $f(t) = t^2 - (2a+8)\cdot t - 1$.

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение f(t) =0 не имело корней на промежутке $\left[(-1)^2;(-3)^2\right) = [1;9)$

2.График функции y= f(t) относительно t есть парабола, изображенная на рисунке.
Ее ветви направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс, т.к. f(0) = -1
Поэтому квадратный трехчлен имеет два корня.
$t_1 < 0, t_2 > 0$.
Уравнение f(t)=0 имеет корень на промежутке
$[1;9)$ **тогда и только тогда, когда**



$1 \le t_2 \le 9$.

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(9) > 0 \end{cases}$$

3.Решим полученную систему

$$\begin{cases} 1-(2a+8)\cdot 1-1 \le 0 \\ 81-(2a+8)\cdot 9-1 > 0 \end{cases}, \begin{cases} 1-2a-8-1 \le 0 \\ 81-18a-72-1 > 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2a \le 8 \\ -18a > 8 \end{cases}, \begin{cases} a \ge -4 \\ a < \frac{4}{9} \end{cases}, -4 \le a < \frac{4}{9}$$

Уравнение f(t)=0 не имеет корней на промежутке $[1;9)$ **для всех остальных значений** a**, т.е. когда** $a < -4$ **или** $a \ge \frac{4}{9}$

Ответ: $a < -4; a \ge \frac{4}{9}$

Задача 10.

Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[2;4)$ значение выражения $\log_2^2 x + \log_2 x$ не равно значению выражения $5 + a \cdot \log_2 x$.

Решение.

1. $\log_2^2 x + \log_2 x \neq 5 + a \cdot \log_2 x$.

$\log_2^2 x + \log_2 x - 5 - a \cdot \log_2 x \neq 0$

$\log_2^2 x + (1 - a) \cdot \log_2 x - 5 \neq 0$

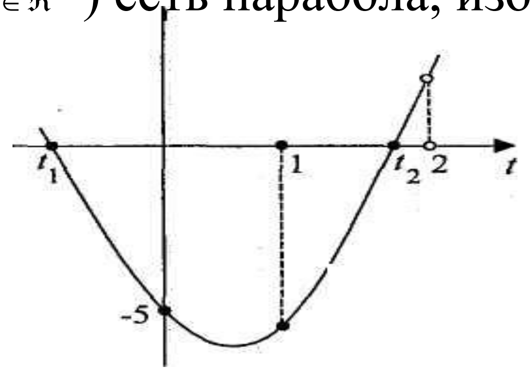
Пусть $\log_2 x = t$

$t^2 + (1-a)\cdot t - 5 \neq 0$

$$f(t) = t^2 + (1-a)\cdot t - 5$$

В задаче требуется, чтобы уравнение $f(t) = 0$ не имело корней на промежутке $[\log_2 2; \log_2 4) = [1;2)$

2.График функции y=f(t)(относительно переменной t, $t \in \Re$) есть парабола, изображенная на рисунке.



Ее ветви направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс, т.к. f(0)=-5. Квадратный трехчлен имеет два корня $t_1<0$, $t_2>0$. Уравнение f(t)=0 имеет корень на промежутке $[1;2)$ тогда и только тогда, когда $1 \leq t_2 < 2$

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

3.Решим полученную систему

$$\begin{cases} 1^2 + (1-a)\cdot 1 - 5 \le 0 \\ 4 + (1-a)\cdot 2 - 5 > 0 \end{cases}.$$

Решив систему неравенств получим $-3 \le a < \frac{1}{2}$.

Уравнение f(t)=0 не имеет корней для всех остальных значений a, т. е. $a < -3$ или $a \ge \frac{1}{2}$

Ответ: $a < -3$; $a \ge \frac{1}{2}$

<u>Задача 11.</u>

При каких значениях a сумма $\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $\log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ не равна единице ни при каких значениях x ?

Решение.

$$a > 0, a \ne 1, x \ge 0$$

$$\log_a \frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \log_a \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \ne 1$$

$$\log_a \left(\frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \ne 1$$

$$\log_a \frac{(3+2\sqrt{x})(4+3\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} \ne 1$$

$$\log_a \frac{12+9\sqrt{x}+8\sqrt{x}+6x}{(1+\sqrt{x})^2} \ne 1$$

$$\log_a \frac{6x+17\sqrt{x}+12}{1+2\sqrt{x}+x} \neq \log_a a$$

По свойству монотонности логарифмической

функции $\frac{6x+17\sqrt{x}+12}{1+2\sqrt{x}+x} \neq a$

$1+2\sqrt{x}+x \neq 0$

$6x+17\sqrt{x}+12 \neq a+2\sqrt{x}\,a+a\,x$

$(6x-ax)+(17\sqrt{x}-2a\sqrt{x})+(12-a)\neq 0$

$(6-a)x+(17-2a)\sqrt{x}+(12-a)\neq 0$

Пусть $\sqrt{x}=t$, $t\geq 0$

$(6-a)t^2+(17-2a)t+(12-a)\neq 0$

Найдем все a, при которых у квадратного уравнения

$(6-a)t^2+(17-2a)t+(12-a)=0$ нет корней, $t\geq 0$

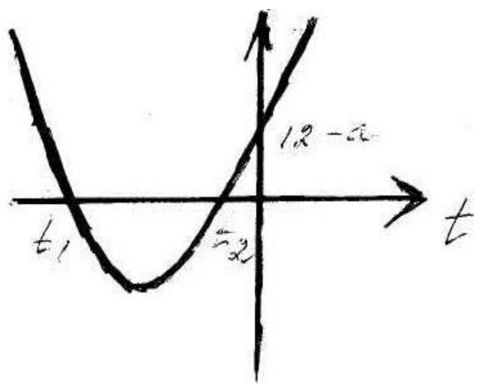
1. $6-a=0$, $a=6$

Если $a=6$, то получаем уравнение $5t+6=0$, $t=-1{,}2$

$$\begin{cases} t = 1{,}2 \\ t \geq 0 \end{cases} \varnothing$$

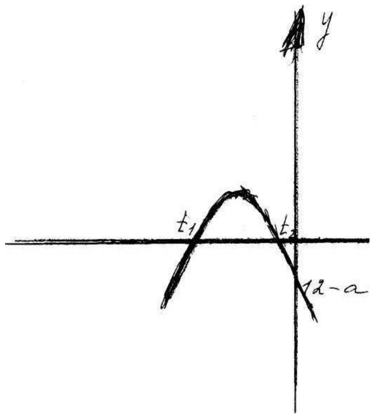
2. $6-a>0$, $a<6$

При $a<6$



ветви параболы направлены вверх.
Абсцисса вершины $\frac{2a-17}{2\cdot(6-a)}<0$, а свободный член

12-а>0 . $t \geq 0$
При а < 6
уравнение корней не имеет.
3.6-а <0, а>6



Если а>6 , то ветви параболы направлены вниз. Парабола не пересекает неотрицательную полуось, только если она пересекает ось ординат ниже начала координат.
Значит, свободный член 12-а<0, а>12.

При а>12 корней нет.

$$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} a<6 \\ a>12 \\ a=6 \end{array}\right. \end{cases} \qquad a\in(0;1)\cup(1;6]\cup(12;+\infty)$$

Ответ: $(0;1)\cup(1;6]\cup(12;+\infty)$